تأثير دلتا كرونكر
على حلقة المصفوفات المعرفة على ضرب كرونكر

■ أحلام محمد الصويعي *

● تاريخ الاستلام: 2024/02/24م ● تاريخ القبول 2024/04/07م

■ **الملخص:**

تهدف هذه الدراسة إلى استكشاف كيفية تحول حلقات المصفوفات غير التبادلية المعرفة على ضرب كرونكر إلى حلقات تبادلية باستخدام دلتا كرونكر. تُظهر النتائج أن التلاعب باستخدام دلتا كرونكر يمكن أن يُحدث التبادلية في بعض حالات حلقات المصفوفات. هذا التغيير يعيد تشكيل فهمنا للخصائص الجبرية للحلقات ويفتح آفاقًا جديدة لتطبيقات مُحسّنة في مجالات متعددة. يُعد البحث خطوة مهمة نحو توسيع نطاق الجبر الخطي ويقدم مُساهمات ذات قيمة للنظريات الرياضية والعمليات الحسابية.

● **الكلمات المفتاحية:** حلقة المصفوفات، ضرب كرونكر، دلتا كرونكر، المجال، التبادلية، قواسم الصفر، العناصر الجامدة.

■ **Abstract:**

This study aims to explore how rings of matrices, which are non-commutative when defined by the Kronecker product, can be transformed into commutative rings using the Kronecker delta. The results show that manipulation using the Kronecker delta can induce commutativity in certain cases of matrix rings. This change reshapes our understanding of the algebraic properties of the rings and opens up new prospects for enhanced applications in various fields. The research represents a significant step in expanding the scope of linear algebra and offers valuable contributions to mathematical theories and computational processes.

● Keywords: Matrix ring, Kronecker product, Kronecker delta, Field, commutativity, zero divisors, idempotent elements.

* محاضر - بقسم الرياضيات - كلية العلوم الأصابعة- جامعة غريان E-maiI:ahlamalsayh85@gmail.com

■ **المقدمة:**

في مجال الرياضيات، تحظى المصفوفات بأهمية بالغة كأدوات أساسية لحل التحديات الحسابية والهندسية. خاصة ضرب كرونكر، بالتحديد، تُعد من العناصر الجوهرية في بناء حلقات المصفوفات وتوفر مساحة لاستكشاف الديناميكيات الجبرية المعقدة. أهمية هذه الدراسة تكمن في تحليل تأثير دلتا كرونكر على إمكانية تحويل حلقات المصفوفات من غير تبادلية إلى تبادلية، وما يترتب على ذلك من تغييرات في خواص الحلقة.

■ **مشكلة البحث:**

تدور المشكلة الرئيسية حول استكشاف الطرق التي يمكن من خلالها تغيير طبيعة حلقات المصفوفات المعرفة بضرب كرونكر إلى حلقات تبادلية، بما في ذلك الفحص الدقيق لتأثيرات دلتا كرونكر على هذه الحلقات.

■ **أهداف البحث:**

الهدف من هذا البحث هو تعميق الفهم لكيفية تحقيق التبادلية في حلقات المصفوفات عبر تطبيق دلتا كرونكر وتحليل التأثيرات الناجمة عن هذا التحول على الخصائص الجبرية للحلقة. يشمل ذلك تقييم البنية الجبرية للحلقة والخواص المرتبطة بها بعد التحول.

■ **أهمية البحث:**

تأثير دلتا كرونكر يمثل موضوعًا هامًا للبحث لأنه يوفر إمكانية لتحسين الفهم الجبري لحلقات المصفوفات.

هذا البحث قد يفتح آفاقًا جديدة للتطبيقات الرياضية والهندسية التي تتطلب التبادلية كخاصية أساسية.

■ **الدراسات سابقة:**

بدأت قصة استكشافنا مع دراسة Bobbi Jo Broxson المُؤثرة التي تُعد علامة فارقة في تاريخ الجبر الخطي والتي أعادت تقييم ضرب كرونكر بتقديم تحليلات معمقة للقيم الذاتية،

القيم المفردة، الرتبة والمحدد للمصفوفات الناتجة. دراستها "The Kronecker Product" التي نُشرت عام 2006 قد فتحت بابًا واسعًا للاستفادة من ضرب كرونكر في تطبيقات نظرية وعملية، من قبيل حل المعادلات الخطية وإثراء المفاهيم الرياضية.

مُستمدًا من هذه الأسس المتينة واستفادة من دراسات Huamin Zhang وFeng Ding في عام 2013، اللتين وضّحتا العلاقات الحاسمة بين ضرب كرونكر والقيم المفردة للمصفوفات، إلى جانب تحليلات Mehsin Jabel Atteya حول إمكانية تبادلية المصفوفات المثلثية العلوية باستخدام مصفوفة هانكل، نجد في هذه البحوث أرضية خصبة لاستقراء احتمالية توليد مصفوفات تبادلية من خلال استراتيجيات جديدة تعتمد على استغلال فرضيات وتقنيات مثل دلتا كرونكر.

تستند رؤية بحثنا الحالي أيضًا إلى مساهمات أحلام محمد الصويعي التي تناولت وضع حلقة مصفوفات تتعامل مع ضرب كرونكر وضرب هادامار، وقد أشارت دراستها إلى أن حلقة المصفوفات بضرب كرونكر ليست تبادلية غالبًا، وهو ما يدعو إلى إعادة التفكير في كيفية تحقيق التبادلية. إن هدفنا الأسمى في هذا الإطار هو إثبات أنه بالإمكان، تحت ظروف معينة، تحقيق التبادلية وهو ما يُمهد الطريق لاستكشاف احتمالات جديدة في بيئات حسابية وتقنية.

■ منهجية البحث:

في هذا البحث، نعتمد على التحليل النظري كمنهجية أساسية لدراسة تأثير دلتا كرونكر على حلقة المصفوفات المعرفة بضرب كرونكر. نركز على استنباط وتطوير النماذج الرياضية التي توضح التغيرات الجبرية للحلقات المصفوفية تحت تأثير دلتا كرونكر، مع الاعتماد على الاستدلال الرياضي والمفاهيم الأساسية في نظرية الحلقات والجبر الخطي.

ختاما، يسلط هذا البحث الضوء على دور حاسم لدلتا كرونكر في تعزيز فهمنا للتأثيرات الجوهرية لضرب كرونكر على بنية حلقات المصفوفات. إنه يمهد الطريق لاستكشافات جديدة في الجبر الخطي، مُظهرًا كيف يمكن للتعديلات الصغيرة أن تفتح آفاقًا واسعة لتطبيقات رياضية معقدة ومتطورة. هذا البحث، بلا شك، يُضيف إلى الفهم

العميق للرياضيات التطبيقية والنظرية، ويشير إلى بداية فصل جديد في القصة المتواصلة للرياضيات.

التعريفات

ضرب كرونكر (جهيمة، مجي، 2006، ص401): لتكن A و B مصفوفتين من النوع $n_1 \times m_1$ و $n_2 \times m_2$ وعلى التوالي، يعرف ضرب كرونكر للمصفوفتين A و B كما يلي:

$$\mathrm{C} = \mathrm{A} \otimes \mathrm{B} = [\mathrm{a_{ij}B}] \text{ لكل } i, j = 1,2, \dots, n$$

دلتا كرونكر(جهيمة، مجي، 2006، ص15):هي دالة ذات متغيرين اثنين عادة ما يكونا عددين صحيحين طبيعيين . تكون الدالة 1 إذا كانت المتغيرات متساوية، و0 بخلاف ذلك.

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \ , i = j \\ 0 \ , i \neq j \end{cases}$$

المجال (جهيمة، صقر، 2000، ص257): هو كل حلقة تبديلية ذات عنصر محايد والتي فيها لكل عنصر(يختلف عن الصفر)معكوس.

حلقة المصفوفات المعرف عليها ضرب كرونكر (الصويعي، 2021، ص94):اذا كانت $\mathbb{R}$ مجموعة الأعداد الحقيقة فإن $(M_n(\mathbb{R}), +, \otimes)$ حلقة بالنسبة لعملية جمع المصفوفات وضرب كرونكر لأنها تحقق شروط الحلقة.

استخدامات دلتا كرونكر

1. **تشكيل مصفوفات الوحدة:** دلتا كرونكر تُستخدم لتشكيل مصفوفات الوحدة، حيث تكون جميع العناصر على القطر الرئيسي 1 وباقي العناصر 0. مصفوفة الوحدة هذه تلعب دورًا مهمًا في عمليات الجبر الخطي، خاصة في الضرب والعكس.

2. **إجراء عمليات على المصفوفات:** في بعض الأحيان، قد ترغب في تطبيق تحويل معين أو إجراء عمليات حسابية على عناصر معينة داخل المصفوفة فقط. استخدام دلتا كرونكر يمكن أن يساعد في تحديد هذه العناصر بدقة.

3. **تحليل الأنظمة الخطية:** في تحليل الأنظمة الخطية، خاصةً تلك التي تُعبر عنها

في صورة معادلات خطية، يُستخدم دلتا كرونكر لتبسيط التعبيرات والمساعدة في فهم كيفية تأثير تغيير متغير مُعين على النظام كله.

4. **دراسة المصفوفات القطرية:** في حالات حيث ترغب في فهم خصائص المصفوفات القطرية أو تشكيل مصفوفات بخصائص معينة، يمكن استخدام دلتا كرونكر لتسهيل هذه المهام.

5. **في الفيزياء والهندسة:** يُستخدم دلتا كرونكر في العديد من تطبيقات الفيزياء والهندسة لتمثيل العلاقات التي تحتاج إلى أن تكون مخصصة بدقة، كما في نظريات المجال والفيزياء الكمومية، وتحليل الأنظمة وتصميم الدوائر.

6. **البرمجة وتحليل البيانات:** في البرمجة وتحليل البيانات، قد تُستخدم دلتا كرونكر لإنشاء مصفوفة يتم فيها تصفية بحيث يتم الاحتفاظ بالعناصر ذات معايير معينة (مثلا، عناصر القطر الرئيسي كما هو مستخدم في هذا البحث) للتعامل مع البيانات المُعينة أو لتحسين العمليات الحسابية.

■ النتائج والمناقشة

مبرهنة: لتكن $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ باستخدام دلتا كرونكر $A\otimes B = B\otimes A$.

البرهان:

$$A\otimes B = [a_{ij}B] = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}B & a_{n2}B & \cdots & a_{nn}B \end{bmatrix}$$

باستخدام دلتا كرونكر

$$\mathrm{A\otimes B} = \begin{bmatrix} a_{11}B & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}B & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}B \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}
a_{11}b_{11} & \cdots & a_{11}b_{1n} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
a_{11}b_{21} & \cdots & a_{11}b_{2n} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \cdots & & & \vdots \\
a_{11}b_{n2} & \cdots & a_{11}b_{nn} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & a_{22}b_{11} & \cdots & a_{22}b_{1n} & \cdots & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & a_{22}b_{21} & \cdots & a_{22}b_{2n} & \cdots & & & \\
0 & 0 & 0 & \vdots & \cdots & \vdots & & & & \\
0 & 0 & 0 & a_{22}b_{n1} & \cdots & a_{22}b_{nn} & \cdots & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn}b_{11} & \cdots & a_{nn}b_{1n} \\
 & & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & a_{nn}b_{21} & \cdots & a_{nn}b_{2n} \\
 & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & & & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn}b_{n2} & \cdots & a_{nn}b_{nn}
\end{bmatrix}$$

باستخدام دلتا كرونكر

$$=\begin{bmatrix}
a_{11}b_{11} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
0 & \cdots & a_{11}b_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & a_{22}b_{11} & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn}b_{nn}
\end{bmatrix}$$

وبنفس الطريقة وباستخدام دلتا كرونكر نوجد $B\otimes A$

$$B\otimes A = [b_{ij}A]$$

$$=\begin{bmatrix}
b_{11}a_{11} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
0 & \cdots & b_{11}a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & b_{22}a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{nn}a_{nn}
\end{bmatrix}$$

وبما أن $a_{ij},b_{ij} \in \mathbb{R}$ لكل $i,j = 1,2,\dots,j$ تكون عناصر تبادلية لأن $\mathbb{R}$ حلقة

تبديلية ولذلك فإن $a_{ij}b_{ij} = b_{ij}a_{ij}$

$$B\otimes A = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \\ 0 & \cdots & a_{11}b_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & a_{22}b_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 & & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \cdots & a_{nn}b_{nn} \\ 0 & 0 & 0 & & & & & \end{bmatrix} = A\otimes B$$

● **تمهيدية:**

حلقة المصفوفات المعرفة على ضرب كرونكر تحتوي على المحايد.

البرهان

نفرض أن $A_n \in M_n(R)$ فان

$$A_n\otimes I_1 = [a_{ij}I] = [a_{ij}[1]] = \begin{bmatrix} a_{11}[1] & a_{12}[1] & a_{13}[1]\cdots & a_{1n}[1] \\ a_{21}[1] & a_{22}[1] & a_{23}[1]\cdots & a_{2n}[1] \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \cdots & \vdots \\ a_{n1}[1] & a_{n2}[1] & a_{n3}[1]\cdots & a_{nn}[1] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3}\cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = A_n$$

وباستخدام تأثير دلتا كرونكر على هذه المصفوفة

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0\cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0\cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots\cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0\cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \neq A_n$$

لذلك لا يكون لوجود العنصر المحايد تأثير على عناصر هذه الحلقة، أي أن هذه الحلقة تحت تأثير دلتا كرونكر لا تحتوي المحايد، وبذلك لا تكون مجالا .

ملاحظة

«في دراسة الخصائص الجبرية لما يُعرف بحلقات المصفوفات المعرفة على ضرب كرونكر، وباستخدام دلتا كرونكر .نلاحظ أنه لا توجد عناصر جامدة في هذه الحلقات؛ وتُعرف العناصر الجامدة بأنها تلك التي لا تتغير بتطبيق أي تحويل خطي. بينما نستطيع ايجاد قواسم للصفر بكل سهولة، وهذا يوضح تأثير دلتا كرونكر على بنية هذه الحلقة «

إذا كانت $A_n \in M_n(\mathbb{R})$ حيث $M_n(\mathbb{R})$ حلقة مصفوفات معرفة على ضرب كرونكر فان

$$A_n^2 = A_n \otimes A_n = [a_{ij}A_n]$$

$$[a_{ij}A_n] = \begin{bmatrix} a_{11}A_n & a_{12}A_n & \cdots\cdots & a_{1n}A_n \\ a_{21}A_n & a_{22}A_n & \cdots\cdots & a_{2n}A_n \\ \vdots & \vdots & \cdots\cdots & \vdots \\ a_{n1}A_n & a_{n2}A_n & \cdots\cdots & a_{nn}A_n \end{bmatrix}$$

فإن باستخدام دلتا كرونكر تكون

$$\left|[a_{ij}A_n] = \begin{bmatrix} a_{11}A_n & a_{12}A_n & \cdots\cdots & a_{1n}A_n \\ a_{21}A_n & a_{22}A_n & \cdots\cdots & a_{2n}A_n \\ \vdots & \vdots & \cdots\cdots & \vdots \\ a_{n1}A_n & a_{n2}A_n & \cdots\cdots & a_{nn}A_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}A_n & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & a_{22}A_n & \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots\cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & a_{nn}A_n \end{bmatrix} \neq A_r\right.$$

إذن حتى بعد استخدام دلتا كرونكر على عناصر هذه الحلقة لا تكون جامدة.

ولكن بالإمكان ايجاد عناصر قاسمة للصفر في هذه الحلقة باستخدام دلتا كرونكر

إذا كان $A_n, B_n \in M_n(\mathbb{R})$

وكانت $\neq 0$ $A_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots 0 \\ a_{21} & 0 & \cdots 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots \vdots \\ 0 & 0 & \cdots 0 \\ a_{n1} & 0 & 0 \end{bmatrix}$ و $\neq 0$ $B_n = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots b_{nn} \end{bmatrix}$

فإن

$$A_n \otimes B_n = [a_{ij}B_n] = \begin{bmatrix} 0B & 0B & OB\dots & 0B \\ a_{21}B & 0B & 0B\dots & 0B \\ 0B & 0B & 0B\cdots & 0B \\ \vdots & \vdots & \vdots\ \vdots & \vdots \\ 0B & 0B & 0B^{\cdots} & 0B \\ a_{n1}B & 0B & 0B^{\cdots} & 0B \end{bmatrix}$$

باستخدام دلتا كرونكر

$$A_n \otimes B_n = [a_{ij}B_n] = \begin{bmatrix} 0B & 0B & OB\dots & 0B \\ a_{21}B & 0B & 0B\dots & 0B \\ 0B & 0B & 0B\cdots & 0B \\ \vdots & \vdots & \vdots\ \vdots & \vdots \\ 0B & 0B & 0B^{\cdots} & 0B \\ a_{n1}B & 0B & 0B^{\cdots} & 0B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0\cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0\cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0\cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots\cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0^{\cdots} & 0 \\ 0 & 0 & 0^{\cdots} & 0 \end{bmatrix} = 0$$

أي أن A_n, B_n قواسم للصفر.

وكذلك عند استخدام دلتا كرونكر على حلقة المصفوفات المعرفة على ضرب كرونكر فان الناتج دائما يكون مصفوفة قطرية، أو صفرية .

■ الخلاصة:

تُظهر نتائج البحث أن استعمال دلتا كرونكر يمكن أن يحول حلقات المصفوفات المرتبطة بضرب كرونكر إلى حلقات تبادلية. ومع ذلك، تظل هذه الحلقات تحتوي على قواسم صفر، مما يعني أنها ليست مناطق صحيحة ولا تستوفي شروط الحقول الرياضية(أي لا تكون مجالاً)، لأنه لا يمكن العثور فيها على معكوس لكل عنصر

■ المراجع:

الصويعي، أ. م. (2021). تعريف ضرب كرونكر وضرب هادامار على حلقة المصفوفات. *مجلة العلوم الإنسانية والطبيعية*. الخرطوم، السودان.

جهيمة، ر. م.، & مجي، م. ص. (2006). جبر المصفوفات. بيروت: دار الكتاب الجديد المتحدة.

جهيمة، ر. م.، & صقر، ع. م. (2000). الجبر المجرد. بيروت: دار الكتاب الجديد المتحدة.

Abadir, K. M., & Magnus, J. R. (2002). Notation in econometrics: a proposal for a standard. *The Econometrics Journal, 5*(1), 7690-.

Atteya, M. J. (2016). Kronecker product with applications. *MJ Journal on Algebra and Its Applications, 1*(1), 14-.

Abd Elhamid, S. (2019). On the Kronecker Products. *AI-Satil, 13*(19), 2531-.

Broxson, B. J. (2006). The kronecker product. University of North Florida Theses and Dissertations.

Jdar, L., & Abou-Kandil, H. (1989). Kronecker products and matrix Riccati differential systems. *Linear Algebra and its Applications, 121*(251-39 ,(3-.

Koning, R. H., Neudecker, H., & Wansbeek, T. (1991). Block Kronecker products and the vecb operator. *Linear Algebra and its Applications, 149*, PP165184-.

Dehghan, M., & Hajarian, M. (2008). An iterative algorithm for the reflexive solutions of the generalized Sylvester matrix equations.

Applied Mathematics and Computation, 202(2), 571588-.

Neudecker, H. (1969). Some theorems on matrix differentiation with special reference to kronecker matrix products. *Journal of the American Statistical Association, 64*(327), 953963-.

Seberry, J., & Zhang, X. M. (1993). Some orthogonal matrices constructed by Kronecker multiplication. *Australasian Journal of Combinatorics, 7*, PP.213-224.

Zhang, H., & Ding, F. (2013). On the Kronecker Products and Their Applications. *Journal of Applied Mathematics, 2013*(8), 111-.