

علم / اكتشافات سنة / العرب

د. جمال الدباغ *

مقدمة:-

من المعروف جيداً أن العرب قاموا منذ ظهور الاسلام ونشوء الامبراطورية الاسلامية حتى القرن الخامس عشر الميلادي بدور هام وأساسى فى مختلف الفروع العلمية من رياضيات وفلك وفيزياء وكيمياء واحياء وطب وصيدلة وجغرافيا وغيرها . ويعترف معظم المؤرخين الغربيين بهذا الدور الكبير ولكن البعض منهم المتعصب والمتحيز يحاول التقليل من شأن هذا الدور ووصفه بأنه دور الوسيط الناقل للعلوم والحضارة اليونانية والهندية والبابلية والمصرية القديمة الى أوروبا القرون الوسطى التى ابتدأت باستيعاب العلوم القديمة وتطويرها . ورغم كثرة البحوث والكتب والمقالات باللغة العربية عن دور العرب والمسلمين فى تطور العلوم الا أن غالبيتها يتصف بالعمومية والاحتواء على التصريحات العامة الشاملة والمبالغ بها أحياناً حول فضل العرب فى هذا المجال العلمى أو ذاك التى تفنقر الى الشرح والتوضيح والدعم بالحجج المقنعة . فمثلاً قد نقرأ فى احد الكتب أن أحد العلماء العرب قام بحساب محيط الكرة الارضية بدرجة عالية من الدقة ولا يتبع ذلك أى توضيح للطريقة المستخدمة فى هذا الحساب أو المفاهيم الجديدة أو القديمة التى تعرضت لها هذه الطريقة . وهل استخدم فى هذه الحساب نوع من الآلات وماهى النتائج بالارقام بالضبط التى توصل اليها هذا العالم ومقارنة هذه النتائج بالارقام المعروفة فى الوقت الحاضر أو بالنتائج التى كانت معروفة سابقاً أن وجدت . وهكذا نجد المثقف العربى متعطشاً لقراءة بعض الحقائق عن الانجازات العلمية العربية التى قام بها أجداده بحيث تكون هذه الحقائق سنداً بالارقام والطرق والنتائج المحددة ومدعمة بحجج واضحة ومقنعة ومعتمدة على مصادر أصلية أو موثوق بها .

نحاول فى هذه المقالة القاء بعض الضوء على انجازات العلماء العرب والمسلمين فى احد مجالات العلوم الرياضية وهو علم المثلثات وتقييم هذه الانجازات بأسلوب هادئ وموضوعى بعيد عن المبالغة والتعصب عن طريق مقارنتها بما سبقها من انجازات فى هذا العلم وتوضيح أثرها على ما تبعها من تطور لهذا العلم . وسعيماً أن محتويات هذه المقالة وطريقة عرضها فى متناول فهم أكبر عدد من القراء .

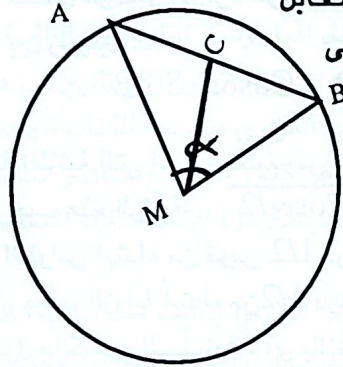
* عضو هيئة التدريس بكلية العلوم - جامعة الفاتح

نبذة من علم المثلثات قبل العرب :-

كان ظهور أولى المعلومات فى علم المثلثات نتيجة لتطور علم الفلك وازدهاره فى العصور القديمة فى بلاد الرافدين ومصر واليونان . فكانت البحوث الفلكية المتعلقة بكشف حركات النجوم والشمس والقمر وتحديد مواقعها فى اوقات مختلفة تتطلب اعمالا مبنية على الاسقاط العمودى للكرة على مستويات مختلفة ، وهذا يقود الى التعامل مع اوتار الدوائر والاقواس المقابلة لها والعلاقات فيما بينها . واهتم بعض العلماء اليونانيين بدراسة هذه العلاقات وتوصلوا الى حقائق كثيرة عن الدوائر واوتارها وممارستها وتقاطعاتها جمعها العالم منلاوس (حوالى عام 100 قبل الميلاد) فى كتاب بعنوان " الكرات " الذى وصلنا بترجمته العربية فقط .

لم يعرف حتى وقتنا الحاضر من هو بالضبط أو من قسم الدائرة الى 360 درجة ، والاهم من ذلك لم يعرف سبب هذه القسمة . وتختلف الاراء فى هذا الموضوع ، فيعتقد البعض أن الفلكيين البابليين هم أول من أجرى هذه القسمة ، بينما يذهب البعض الآخر الى أن هذه الفكرة هى من ابتكار العلماء اليونانيين . ومهما يكن الامر فان القسمة الى 360 درجة كانت فى البداية تتعلق لا بالزاوية المركزية فى دائرة بل بمحيطها . وقام العلماء اليونانيين بوضع جداول لاطوال الاوتار فى دوائر المقابلة لاقواس تمثل أجزاء من 360 درجة من محيط هذه الدوائر وفى الحقيقة فان طول الوتر المقابل لقوس دائرة نصف قطرها 1 هو ضعف جيب نصف الزاوية المركزية المقابلة لهذا

القوس . فاذا كانت زاوية α مركزية فى دائرة نصف قطرية 1 مقابل للقوس AB (الشكل 1) واذا انزلنا العمود MC من المركز M على الوتر ABC



متساوية لـ $1/2$ لذا يكون

$$\sin \alpha / 2 = AC / AM = AC = 1/2 AB.$$

$$AB = 2 \sin \alpha / 2$$

أى أن

شكل (1)

يعتقد أن أول جدول لاطوال الاوتار المقابلة للاقواس وضع من قبل العالم اليونانى هيبارخ (أو ابرخس) حوالى عام 150 قبل الميلاد ، لذا يسميه بعض المؤرخين (مؤسس علم المثلثات) . وبالطبع فان هذه التسمية لا تعكس الحقيقة ، اذا لم يكن لدى العلماء اليونانيين بصورة عامة أية فكرة أو دراسة عن العلاقات والنسب بين اضلاع المثلث وزواياه باستثناء معرفة تناسب اضلاع المثلثات المتشابهة وبعض الحقائق الهندسية القليلة جداً التى يمكن ترجمتها الى قوانين فى علم المثلثات نذكر بالخصوص أن اقليدس أثبت فى الشكلين 12/13 من الجزء الثانى من كتاب (الاصول) حقيقتين مكافئتين لقانون جيب التمام فى حالتى الزاوية المنفرجة والزاوية الحادة ولكنه اعطى هاتين الحقيقتين فى صيغة هندسية بحتة لا تنطبق الى الزاوية وجيوب تمامها . ولتوضيح ذلك نورد نص الشكل 13: (فى المثلث حاد الزوايا المربع المنشأ على الضلع المقابل للزاوية الحادة أصغر من مجموع المربعين المنشأين على الضلعين المجاورين للزاوية الحادة بضلع المستطيل المنشأ على احد الضلعين المجاورين للزاوية الحادة الذى يسقط عليه العمود والمستقيم المقطوع بالعمود باتجاه الزاوية الحادة) . وهذا يعنى أنه فى المثلث ABC (الشكل 2)

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AC \cdot AD$$

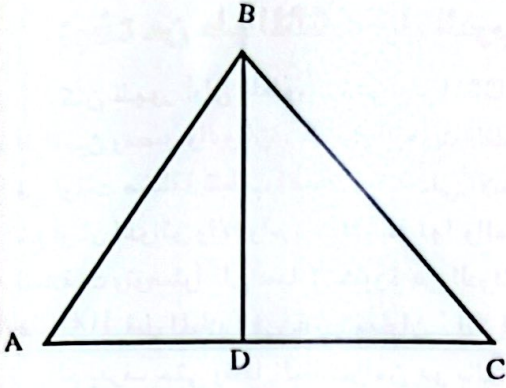
$$AD = AB \cos A$$

وباعتبار أن

لذا فان هذه المعادلة تكافئ قانون جيبوس التمام

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

الشكل (2)



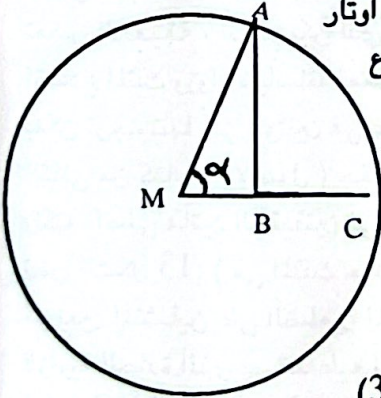
وفى برهان هاتين الحقيقتين لم يتعامل اقليدس مع جيبوس تمام الزوايا بل يستخدم مبرهنة فيثاغورس مرتين .

يذكر أن منلاوس أيضاً وضع جدولاً لأطوال الاوتار المقابلة لاقواس الدائرة ، ولكن أول جدول وصلنا من هذا النوع يعود للعالم بطليموس (100-178م) فى كتابه الفلكي المشهور (المجسطى) الذى ترجم الى العربية وقام بعض العلماء العرب بشرحة . واعتمد بطليموس فى وضع جدولته هذا على حقيقتين هندسيتين قام باثباتها بنفسه تعرف الاولى منهما الآن بمبرهنة بطليموس وتنص على أن مجموع حاصل ضرب كل ضلعين متقابلين فى أى شكل رباعى مرسوم داخل دائرة يساوى حاصل ضرب قطري هذا الشكل . وفى الحالة الخاصة عندما يكون أحد اضلاع هذا الشكل هو قطر الدائرة المرسومة خارجة يمكن من مبرهنة بطليموس استنتاج قانونى جيب مجموع وجيب الفرق بين زاويتين .

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta \pm \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

والحقيقة الثانية التى اثبتها بطليموس تمكن من ايجاد وتر نصف القوس بمعرفة وتر القوس كله ، أى أنها يكافئ قانون جيب هذه الزاوية $\sin \alpha / 2 = \sqrt{1 - \cos \alpha} / 2$. واستطاع بطليموس باستخدام الحقائق وضع جدول اوتار الاقواس ابتداء من قوس 1/2 درجة الى قوس 180 درجة بزيادة نصف درجة . وفى الحقيقة هذا تكافئ جدول جيبوس الزوايا ابتداء من 1/2 درجة الى 90 درجة بزيادة ربع درجة . وكتب بطليموس جميع النتائج فى هذا الجدول بالكسور الستينية ، أى بالنظام العددي الستيني الموضعى الذى اخترعه البابليون واقتبسه اليونانيون منهم . والقيم الموجودة فى جدول بطليموس هذا دقيقة لحد المرتبة الكسرية الستينية الثانية .

استند العلماء الهنود على أعمال الفلكيين اليونانيين منذ القرون الاولى بعد الميلاد واستطاعوا التوصل الى بعض الانجازات الخاصة بهم . وبرز انجاز هندي فى علم المثلثات هو استبدال اوتار الاقواس بجيبوس الزوايا ، وهذا قادهم الى التعامل مع مقادير مرتبطة باضلاع وزوايا المثلث قائم الزاوية ، ولكن لم يهتم العلماء الهنود اهتماماً كافياً بطرق حل المثلث بصورة عامة . وقد تم هذا الانتقال منذ القرن الخامس الميلادى . وكان العلماء الهنود يعرفون الجيب وجيب التمام ومقابل الجيب . وإذا كانت AMC زاوية مركزية فى دائرة نصف قطرها 1 (الشكل 3) و BA عمود على CM عند CM هو جيب هذه الزاوية و MB جيب تمامها . أما مقابل جيب هذه الزاوية هو BC المسماوى لـ MB ،



الشكل (3)

كان الهنود يسمون الجيب (اردهاجيفا) أى نصف الوتر تم اختصروا هذا الاصطلاح الى (جيفا) واستبدال العلماء العرب هذه الكلمة بـ " جيباً " تم " جيب " . وعندما نقل الاوروبيون المؤلفات العربية الى اللغة اللاتينية قاموا بترجمة كلمة جيب بمعناها اللغوى الى " Sinus " التى اختصرت فى جميع اللغات الاوروبية الى " Sin " التى تستعمل فى الوقت الحاضر للإشارة الى هذا المعنى . أما جيب التمام فكان الهنود يسمونه " كوتيجيفا " أى جيب

الباقى . (أوجب المتعة الى 90) . وفى القرن الثانى عشر قام الاوربيون بترجمة " جيب التمام " العربية الى اللاتينية "Sinus Residui" واستبدال هذا الاصطلاح فى القرن الخامس عشر "Sinus Complement" الذى اختصر فيما بعد الى "Cosinus" ثم الى "Cosin" المستعملة فى الوقت الحاضر فى اللغات الاوربية . كذلك أطلق الهنود على مقابل الجيب كلمة " اوتكراجيفا " وترجمت فى القرن الثانى عشر الى "Sinus - Versus" .

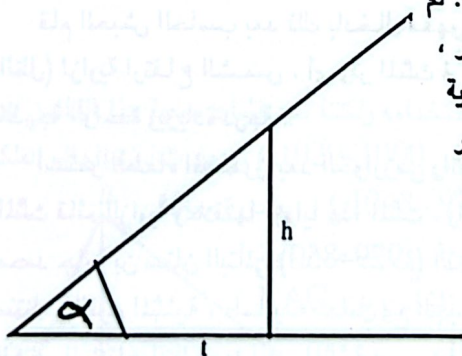
ولكن هذا المفهوم لا يلعب أى دور فى علم المثلثات فى الوقت الحاضر من الحقائق المثبتة التى كانت معروفة عند العلماء الهنود منذ القرن الخامس الميلادى القانون $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ الذى يستنتج مباشرة من مبرهنة فيثاغورس ، وكذلك قوانين جيب المجموع وجيب الفرق وجيب نصف الزاوية . ولكن جميع الدراسات الهندية فى هذا المجال كانت تقتصر على الزوايا فى الربع الاول ، أى التى مقدارها محصور من 0 الى 90 . ووضع العلماء الهنود كذلك جداول الجيوب ومقابل الجيوب لاستعمالها للاغراض الفلكية ولكن جداولهم الاولى التى تعود الى القرن الخامس الميلادى كانت مختصرة واقل دقة من جدول بطليموس .

المثلثات العربية

احتل علم المثلثات مكاناً مرموقاً فى رياضيات بلاد الاسلام ، اذ كان حلقة وصل بين الرياضيات وبعض العلوم الأخرى التى كان لها أهمية خاصة فى ذلك العصر مثل الفلك والجغرافيا ووضع التقويم وعمل الساعات الشمسية ، وابتدأ العلماء العرب بحوثهم فى علم المثلثات بالتعرف على انجازات العلماء الهنود واليونانيين فى هذا المجال . وفى حوالى عام 773م قام العالم الفلكى أبو عبدالله محمد بن ابراهيم الفزارى بترجمة الكتاب الهندى " سند هانت " المتضمن للمعلومات المثبتة والفلكية عند الهنود الى العربية . وفى القرن التاسع الميلادى تمت ترجمة كتاب " المجسطى " لبطليموس وكتاب " الكرات " لمنلاوس الى العربية . وأصبحت هذه الكتب الثلاثة الاساس الذى بنى عليه العلماء المسلمون بحوثهم .

قام العالم المسلم أبو عبدالله محمد بن موسى الخوارزمى (780-850م) بتأليف أحد الكتب الفلكية الاولى باللغة العربية بالاستناد الى المؤلفات الهندية واليونانية . ويتضمن هذا الكتاب أول الجداول العربية للجيوب والظلال ، ولكن لم يصلنا هذا الكتاب الا بترجمته اللاتينية التى قام بها " اديلارد الباتى " فى القرن الثانى عشر الميلادى . ويذهب بعض المؤرخين الى القول بأن جدول الظلال فى هذا الكتاب لم يكن من وضع الخوارزمى نفسه بل هو اضافة متأخرة قام بها أحد تلامذته أو من وضع شروحاً لكتابه هذا . ولكن يمكننا التأكيد بصورة يقينة أن مفهوم الظل وظل التمام كان معروفاً عند أحد معاصرى الخوارزمى وزميله فى " بيت الحكمة " * فى بغداد وهو أحمد بن عبدالله المروزى الذى

غالباً ما يدعى بالحبش الحاسب (توفى بين 864-874م) . لم يظهر مفهوم الظل وظل التمام فى البداية كخطوط مرتبطة بالنواثر ، بل ظهر هذا المفهوم فى البحوث الفلكية الخاصة بتحديد زاوية ارتفاع الشمس . فاذا ثبتنا عموداً رأسياً طوله h ، عندئذ يتغير ظل هذا العمود t على الارض الافقية حسب زاوية ارتفاع الشمس α (الشكل 4)

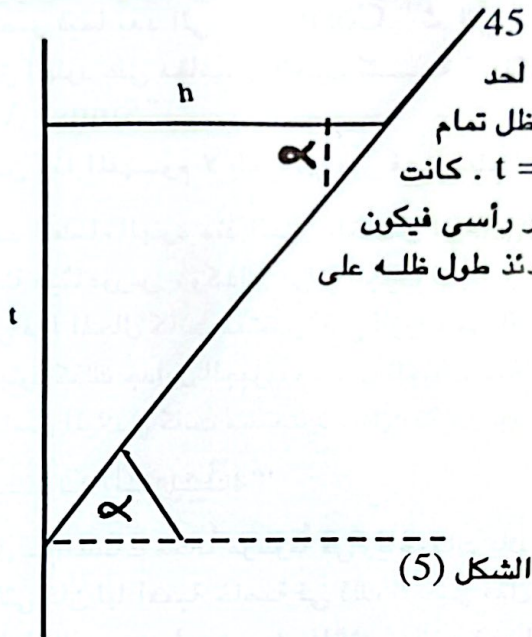


الشكل (4)

فأخذ الحبش الحاسب عموداً طوله $h=1=60'$ (كان النظام العددي المستخدم فى الحاسبات الفلكية هو النظام

* بيت الحكمة : المؤسسة العلمية التى انشأها الخليفة المأمون وجمع فيها العلماء والمترجمين وزدها بمكتبة غنية ومرصد مجهز تجهيزاً جيداً .

الموضعى الستينى الذى يقسم فيه الواحد الصحيح الى 60 دقيقة ، والدقيقة الواحدة تقسم الى 60 ثانية ، والثانية الواحدة الى 60 ثالثة وهكذا) ووضع جدولا لطول ظل هذا العمود فى أوقات مختلفة من النهار تناظر زاوية ارتفاع الشمس التى بدأها بدرجة واحدة تم زادها درجة حتى بلغت 45 درجة وتعطى قيم طول الظل فى هذا الجدول بصورة دقيقة لحد الثانية الواحدة . وهذا الجدول يمثل فى الحقيقة جدول ظل تمام الزوايا فى حساب المثلثات وذلك لان $\cot \alpha = \cot \alpha \cdot h = t$. كانت زاوية ارتفاع الشمس تحسب احيانا بتثبيت عمود على جدار رأسى فيكون العمود افقياً . فاذا كان طول هذا العمود $h=1$ يكون عندئذ طول ظله على الجدار t مساوياً لظل زاوية ارتفاع الشمس α (الشكل 5) .



$$t = \tan \alpha$$

والجدير بالذكر أن الحبش الحاسب كان يسمى مفهوم ظل الزاوية بظل المعكوس لهذه الزاوية . وهكذا فإن أول من أدخل مفهومى الظل وظل التمام للزاوية هم العلماء المسلمون فى بغداد فى القرن التاسع الميلادى . وعندما قام الاوربيون بنقل المؤلفات العلمية العربية الى اللاتينية ترجموا هذين الاصطلاحين حرفياً فأصبح الظل العربى (أى ظل التمام فى علم المثلثات) يدعى باللاتينية (umbra recta) (أى الظل المباشر) وظل المعكوس العربى (أى الظل فى حساب المثلثات) هو باللاتينية (umbra versa) (أى الظل المعكوس) . وبعد ذلك بفترة خرج استعمال مفهومى الظل وظل التمام عن نطاق الدراسات الفلكية والساعات الشمسية وادراك العلماء العرب علاقة هذين المفهومين الجديدين بمفهومى الجيب وجيب التمام بأرجاع جميع هذه المفاهيم الى المثلث قائم الزاوية .

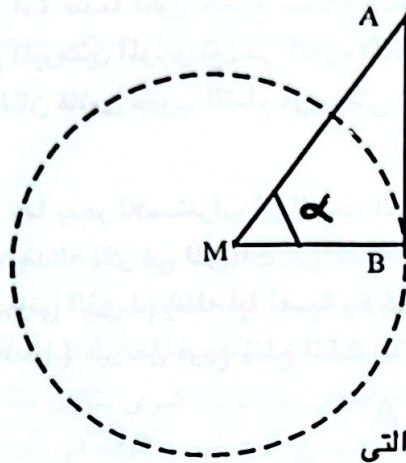
ويمكننا القول أن نشوء علم المثلثات باعتباره علم مستقلاً بذاته بدأ فى تلك الفترة فى الامبراطورية الاسلامية ، اذ أن كل ما عرف قبل ذلك فى هذا المجال كان عبارة عن مجموعة من معلومات متفرقة مرتبطة ارتباطاً وثيقاً بعلم الفلك .

قام الحبش الحاسب بعد ذلك بإدخال مفهوم قاطع تمام الزاوية فى حالة العمود الرأسى وكان يدعوه (وتر الظل) لزاوية ارتفاع الشمس ، أى وتر المثلث فى الشكل (4) . ووضع جدولا لقيم قاطع تمام الزوايا ابتداء من الدرجة الواحدة ويزيادة درجة .

استمر العلماء المسلمون بعد الخوارزمى والحبش الحاسب فى الاهتمام فى مؤلفاتهم الفلكية بدراسة اضلاع المثلث قائم الزاوية وعلاقتها بزوايا هذا المثلث . وتطورت هذه الدراسة على يد العالم الفلكى والرياضى أبى عبدالله محمد جابر بن سنان البتاني (850-929م) الذى وضع كتاباً بعنوان (اصلاح المجسطى) استخدام فيه بصورة منتظمة القيم المثلثية ، علماً بأنه تعامل مع الجيب ومقابل الجيب للزوايا من 0 الى 180 . ، اورد البتاني فى هذا الكتاب العلاقات التالية بين القيم المثلثية :-

$$\cot \alpha = \cos \alpha / \sin \alpha, \tan \alpha = \sin \alpha / \cos \alpha, \sin \alpha = 1 / \csc \alpha$$

$$\cos \alpha = 1 / \sec \alpha, \sec \alpha = \sqrt{1 + \tan^2 \alpha}, \csc \alpha = \sqrt{1 + \cot^2 \alpha}, \sin \alpha = \tan \alpha / \sec \alpha$$



عرضت مبادئ علم المثلثات بشكل اوسع واكثر تفصيلا في " الكتاب الشامل " الذي ألفه العالم أبو الوفا محمد بن محمد البوزجاني (940-997م) . وفي هذا الكتاب قام بتعريف جميع القيم المثلثية بطريقة موحدة بواسطة دائرة نصف قطرها 1 . فمثلاً عرف ظل الزاوية α برسم دائرة نصف قطرها 1 مركزها في رأس هذه الزاوية ورسم مماس لهذه الزاوية هو من نقطة تقاطع احد ضلعي الزاوية مع الدائرة . فيكون ظل الزاوية هو الجزء المقطوع من المماس بين ضلعي الزاوية .

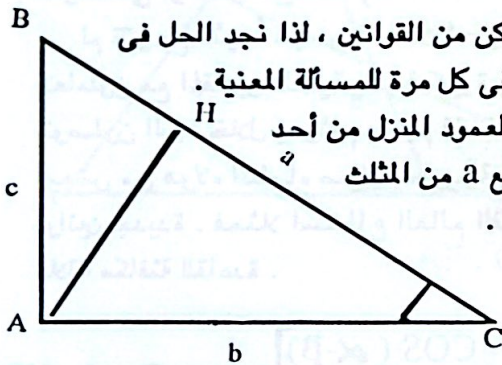
الشكل (6)

ويضيف أبو الوفا العلاقة $\tan \alpha = 1 / \cot \alpha$ الى العلاقات التي

اعطاها الجيب الحاسب . ويعبر أبو الوفا عن قانوني جيب مجموع زاويتين وجيب الفرق

بين زاويتين بدلالة الجيب فقط . فمثلاً قانون جيب الفرق بين زاويتين يعطى عند أبي الوفا بالصيغة .

$$\sin (\alpha - \beta) = \sqrt{\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta} - \sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta - \sqrt{\sin^2 \beta - \sin^2 \alpha} \cdot \sin^2 \beta$$



كان العلماء المسلمون يسعون الى حل المثلث باستخدام أقل عدد ممكن من القوانين ، لذا نجد الحل في اغلب الاحيان طويلاً ، باعتبار أنه يتم خلاله استنتاج القوانين المطلوبة في كل مرة للمسألة المعنية . فعند حل المثلث حاد الزوايا كانوا يقسمونه الى مثلثين قائمي الزاوية بالعمود المنزل من أحد رؤوس المثلث على الضلع المقابل . هكذا فعل البتاني لايجاد الضلع a من المثلث ABC بمعرفة الضلعين b و c منه والزاوية c المقابلة للضلع c .

الشكل (7)

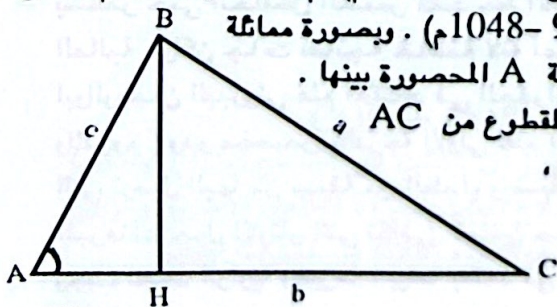
الشكل (7)

فقام أولاً بتحديد الارتفاع $AH = b \cdot \sin c$ والجزء من الضلع a المجاور للزاوية c أي $CH = b + C \sin c$ ، ثم وجد الجزء الثاني BH بتطبيق مبرهنة فيثاغورس على المثلث القائم ABC ووجد a بجمع هذين الجزئين من هنا يتضح أن قانون الجيوب .

$$\sin A / a = \sin B / b = \sin C / c$$

لم يكن معروفاً في وقت البتاني أو أن البتاني لم يرغب في استخدامه ولكننا نجد اثبات صحة هذا القانون لأول مرة عند العالم ابونصر منصور بن علي بن عراق (توفي بين عامي 1000-1020م) ثم عند تلميذة العالم الفلكي والرياضي الشهير أبي الريحان محمد بن أحمد البيروني (973-1048م) . وبصورة مماثلة

يجري حل المثلث عندما يكون المعلوم منه طول ضلعين b, c والزاوية A المحصورة بينهما . فكان العالم العربي في هذه الحالة يوجد طول الجزء AH المقطوع من AC بالعمود من B ، ثم يوجد طول العمود BH نفسه (شكل 8) ،



الشكل (8)

وبعد ايجاد $HC = b - AH$ تطبيق مبرهنة فيثاغورس على المثلث CHB ليجاد a .

اما عندما تكون جميع اضلاع المثلث معلومة ويطلب ايجاد زواياه فكان العلماء العرب فى هذه الحالة يلجأون الى المبرهنتين الموجودتين فى الجزء الثانى من كتاب " الاصول " لاقليدس اللتين أوردنا احدهما سابقاً وذكرنا انها تكافئان قانون جيب التمام فى حالتى المثلث منفرج الزاوية والمثلث حاد الزوايا ، أى القانون .

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2a.b.\cos A$$

وما يدعو للاستغراب أن العلماء العرب لم يهتموا بهذا القانون ولم يحاولوا صياغته بصورة واضحة أو اثباته ، ولا نجد له ذكر فى المؤلفات الرياضية العربية باستثناء حالة واحد فقط وبصورة عابرة ، وذلك عند ابى الريحان البيرونى الذى لم يعطه أية أهمية ونذكر هنا أن العالم المسلم جمشيد غياث الدين الكاشى (القرن الخامس عشر الميلادى) عبر عن مربع ضلع المثلث a بدلالة الضلعين b, c والزاوية المحصورة بينهما A بالصيغة

$$a^2 = (b + c \cdot \cos A)^2 + c^2 \sin^2 A$$

حيث تؤخذ الاشارتان الزائد والناقص بسبب استبدال جيب تمام الزاوية المنفرجة بجيب تمام الزاوية المكمل الى 180 درجة . ويتبسيط الجانب الايمن من هذه الصيغة يمكن الحصول على قانون جيب التمام بالصيغة المذكورة اعلاه ، ولكن هذه الصيغة لم تشاهد بصورة صريحة قبل القرن السادس عشر عند العالم الفرنسى فرانسوا فييت (1540-1603م) .

لم تتوسع كثيراً مجموعة العلاقات والقوانين المثلثية فى كتب الرياضيات العربية ، اذ كان العلماء المسلمون يتعاملون مع المقادير المثلثية بحرية كبيرة ويمهارة عالية دون اللجوء الى الصياغة المحددة للنتائج العامة التى كانوا يتوصلون اليها خلال بحوثهم وحلهم المسائل المتعلقة باضلاع وزوايا المثلث بالفلك والجغرافيا . مع ذلك فقد اعطى البعض من هؤلاء العلماء صياغة صريحة وواضحة لبعض النتائج العامة التى توصلوا اليها و التى يمكن اعتبارها قوانين جديدة . فمثلا استطاع العالم الفلكى ابوالحسن على بن ابى سعيد بن يونس . (1009م) استخراج علاقة مكافئة للقاعدة .

$$\cos \alpha \cos \beta = 1/2 [\cos (\alpha + \beta) + \cos (\alpha - \beta)]$$

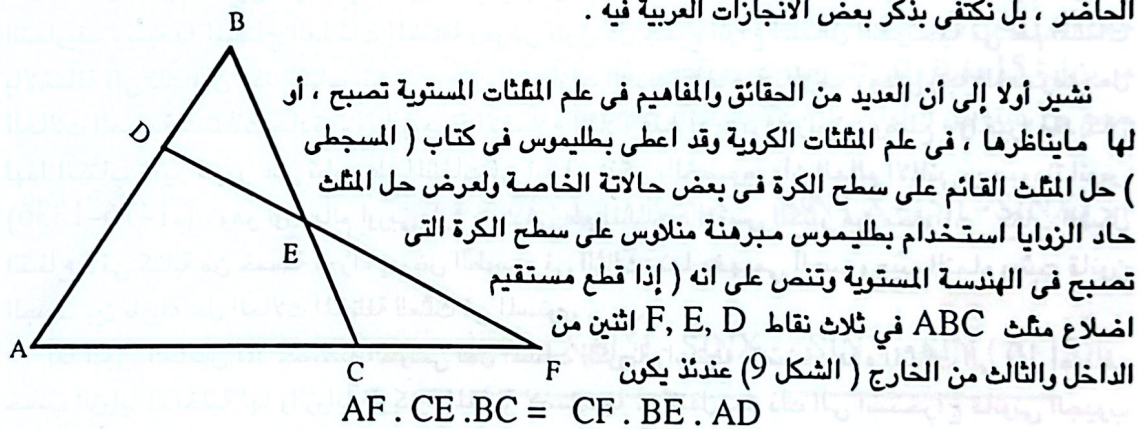
نلاحظ بأن هذه القاعدة تمكن من تحويل الضرب الى الجمع وبالعكس ولعبت دورا هاما فى اختراع حساب اللوغاريثمات من قبل العالم الاسكتلندى جون نابيير (1550-1617) والعالم السويسرى ج بورخى (1552-1632) فى بداية السابع عشر .

لم تكن تطبيقات علم المثلثات مقتصورة عند العلماء العرب على علم الفلك والجغرافيا والساعات الشمسية ، بل تعدت ذلك الى مجالات عديدة أخرى من العلوم ، فنجد العالم الفيزيائى والرياضى ابا على الحسن بن الهيثم (965-1039م) يستخدم علم المثلثات محاولة إيجاد ارتفاع الغلاف الجوى للأرض ، استناد الى أن وقت الشفق يستمر حتى انخافض الشمس تحت خط الافق بأكثر من 19 درجة بسبب انعكاس أشعة الشمس عن السحب العالية . ولكن جاءت نتائج خاطئة لانه اعتبر أن الغلاف الجوى ينتهى بأعلى السحب المرئية ، واستخدم ابوالريحان البيرونى علم المثلثات فى الجغرافيا واعظم مؤلفاته كتاب بعنوان : القانون المسعودى فى الهيئة والنجوم) وهو مخصص بالدرجة الاولى لعلم الفلك الذى كان يدعى عند العرب (بعلم الهيئة) . ولكن اغلب النتائج التى توصل اليها من سبقة من العلماء ويضيف اليها النتائج الخاصة به . فيثبت فى الباب الثانى من هذا الجزء المبرهنات حول الارتار التى تكافئ قوانين جيب مجموع زاويتين وجيب الفرق بين زاويتين وجيب ضعف الزاوية وجيب نصف الزاوية وغيرها ، بينما يعتمد فى الباب الخامس منه على نتائج الابواب السابقة لحساب نسبة محيط

اية دائرة الى قطرها ، أى لحساب القيمة التقريبية للعدد TT . أما الابواب 6-8 فتحتوى على جدول الجيوب وجدول الظلال وطريقة استخدم هذين الجدولين مستعينا بفكرة الاستقطاب (أو الاستكمال) " Interpolation " الخطى والترىبى . أما الباب التاسع والباب العاشر فقد خصصهما البيرونى لدراسة علم المثلثات على سطح الكرة التى نتطرق له فيما يلى .

المثلثات الكروية

أهتم العلماء العرب وبعض العلماء اليونانيين اهتماما شديدا بدراسة علم المثلثات على سطح الكرة لارتباط هذا الموضوع ارتباطا وثيقا بعلم الفلك ، وفى علم المثلثات الكروية تستبدل المستقيمت فى علم المثلثات فى المستوى باقواس دوائر كبرى على سطح الكرة وتقاس أطوال هذه الاقواس بمقياس الزوايا المركزية المقابلة لها ، أى بالدرجات ، حيث يتكون محيط أية دائرة من 360 درجة . وعند تقاطع ثلاثة اقواس من دوائر كبرى يتكون مثلث محدب اضلاعه اقواس هذه الدوائر . سوف لانتناول تطور هذا الموضوع بالتفصيل لانه غير مألوف فى الوقت الحاضر ، بل نكتفى بذكر بعض الانجازات العربية فيه .



الشكل (9)

وكان العلماء العرب يسمون هذه المبرهنة (بقاعدة المقادير الست) قام كل من العالمين ثابت بن قرة الحرابى الصابى (830-910م) وابو عبدالله البتانى بصياغة قانون الجيوب على سطح الكرة ، أى $\sin a / \sin A = \sin b / \sin B = \sin c / \sin C$

حيث C . B . A هى الزوايا الداخلية للمثلث ABC على سطح الكرة و C . B . A هى الزوايا المركزية المقابلة للاضلاع AB , CA , BC على التناظر لهذا المثلث ، أى أن أطوال الاقواس التى هى المثلث ABC تستبدل بجيوب الزوايا المركزية المقابلة لها . وتوصل البتانى فى إحدى مسائله الى علاقة تناظر قانون جيوب التمام فى علم المثلثات المستوية ، هى :

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A$$

وتمكن هذه العلاقة من ايجاد اية زاوية من زوايا المثلث الكروى (أى المثلث على السطح الكرة) بمعرفة أطوال الاقواس التى تشكل أضلاع هذا المثلث ، أو ايجاد أحد اضلاع المثلث بمعرفة الظلعين الآخرين والزاوية المحصورة بينهما . واصبح العلماء الاوربيون فى القرون الوسطى يسمون هذه العلاقة بـ " المبرهنة التبانة "

تنطبق الآن الى موضوع حل المثلث الكروي ، اذ قام كل من العالمين ابي العباس الفضل بن حاتم النيريزي (توفي عام 922م) و ابي الوفا بدراسة الحالة الخاصة عندما يكون ضلعان من هذا المثلث مساويين لربع دائرة كبرى ، أى عندما يكون كل من هذين الضلعين مقابلا لزاوية مركزية قائمة .

واعطى هذان العلماء وكذلك ابونصر بن عراق محمد حميد بن الخضر الخوجاندي (توفي حوالي عام 1000م) اثباتات مختلفة لقانون الجيوب على سطح الكرة . وفى القرنين 12 , 13 م استطاع العلماء العرب حل جميع حالات المثلث الكروي القائم . وفى الاندلس توصل العالم جابر بن عفلا لاول مرة الى حل هذا المثلث عندما يكون المعلوم هو أحد الضلعين القائمين والزاوية المحصورة له . قام العالم الكبير ابوجعفر محمد بن محمد بن الحسن نصير الدين الطوسى (1201-1274م) بتأليف كتاب عنوانه " كتاب الشكل القطاع " عام 1260م . احتل مكانا بارزا فى تاريخ علم المثلثات . فهو قبل كل شئ اول كتاب فيه دراسة حلول المثلثات من قبل علماء مستقبلا بذاته ، حيث كانت جميع المعلومات المثلثية ترد قبل ذلك فى كتب فلكية بالدرجة الاساسية لاعتبارها وسائل مساعدة لحل مسائل العلوم الاخرى . وهو ايضا اول كتاب يعرض فيه علم المثلثات بصورة كاملة ابتداء من المفاهيم الاولى و التعاريف ، يتبعها استنتاج العلاقات المختلفة وعرض طرق حل جميع انواع المسائل النموذجية فى علم المثلثات بالاضافة الى ذلك فان هذا الكتاب يتضمن بعض الانجازات الجديدة الخاصة بالمؤلف ، وعلى وجه الخصوص حل الحالات الصعبة للمثلثات حادة الزوايا بمعرفة الاضلاع الثلاثة فقط أو بمعرفة زاويتين وضلع . وأخيرا فقد كان لهذا الكتاب تأثير كبير على تطور علم المثلثات فى اوروبا . نذكر بالخصوص أن العالم الالماني ريغيومنتانوس (1336-1476م) ، وهو اول عالم اوروبى بارز بحث فى علم المثلثات ، اقتبس الكثير من محتويات " كتاب الشكل القطاع " فى كتابه من خمسة أجزاء يعرض الطوسى فى الثالث منها مفهوما الجيب وجيب التمام ويثبت قانون الجيوب بين طريقة حل الحالات المختلفة للمثلث فى المستوى .

أما الجزء الخامس فقد خصصه الطوسى لحل المثلثات الكروية واستهله بتصنيف هذه المثلثات الى 10 أصناف حسب الزوايا الداخلية لها والزوايا المركزية المقابلة لاضلاعها . وانتقل بعد ذلك الى استخراج قانونى الجيوب والظل للمثلثات على سطح الكرة . وهكذا فإن كتاب " الشكل القطاع " للطوسى هو أول كتاب فى تاريخ الرياضيات مخصص باكملة لعلم المثلثات .

الجدول المثلثية العربية ٨-

أن حل المثلث بمعطيات محددة يتطلب فى معظم الحالات الرجوع الى جداول القيم المثلثية للزوايا لايجاد الزوايا عند معرفة قيمتها المثلثية او بالعكس . وقد قام العلماء العرب والمسلمون بوضع العديد من هذه الجداول التى كانت تشكل جزءا من مجموعة كبيرة من جداول تسمى " زيغ " وكانت هذه الكلمة تعنى مجموعة جداول عند الفلكيين والجغرافيين وتتضمن التقاويم المختلفة منها الاسلامية والمسيحية والسريانية واليهودية والفارسية وغيرها ، بالاضافة الى جداول مثلثية وجدول لحركات النجوم ومواقعها فى فلك البروج فى أوقات مختلفة ، وشرح طرق حساب الزمن والتنبؤ بالكسوف والخسوف وهو ما يتطلب معلومات جيدة فى علم المثلثات . وقد وضع العلماء المسلمون مايزيد عن 100 زيغ ما بين القرن الثامن والقرن الخامس عشر الميلاديين ، وفى مدن مختلفة الامبراطورية الاسلامية . يحتوى زيغ محمد بن موسى الخوارزمي على جدول للجيب بالنظام الستينى بزيادة درجة واحدة بثلاثة مراتب ستينية ، و جدول لظل التمام بمرتبة ستينية واحد ، ويحتوى زيغ الحاسب على جداول للجيب والظل و ظل التمام ومقابل الجيوب وقاطع التمام بزيادة درجة واحدة بنفس الدرجة من الدقة . ووضع

الحبش الحاسب جدولا آخر للجيب بزيادة ربع درجة وباربع مراتب كسرية وجدولاً للظل بزيادة نصف درجة ويمرتبتين كسريتين . وجميع هذه الجداول قريبة في دقتها من جداول بطليموس . أما أبو الوفا البوزجاني فقد اقترح طريقة استقطابية لوضع الجداول المثلثية تمكن بواسطتها من التوصل الى النتائج اكثر دقة من نتائج بطليموس ، وتعتمد هذه الطريقة على حقيقة أنه بزيادة الزوايا في الربع الاول بصفر الفرق بين جيوبها أى أن

$$\sin(\theta + 2h) - \sin(\theta + h) < \sin(\theta + h) - \sin \theta < \sin \theta - \sin(\theta - h)$$

حيث H زاوية صغيرة موجبة ، وبذلك حصل أبو الوفا على قيمة جيب $1/2$ دقيقة لحد المرتبة الكسرية الستينية الرابعة ، وبالكسور العشرية تساوى هذه القيمة $\sin 1/2 = 0.0087265373$ وهذه قيمة عالية الدقة بالمقارنة بالقيمة المناظرة في الجداول الحديثة وهى 0.0087265355 علماء بأن جدول الجيوب عند أبى الوفا هو الزيادة $1/4$ أى $15'$. كما وضع أبو الوفا جدولاً للظل وآخر التمام .

اجرى العالم ابن يونس حسابات مثلثية فى "زيج الحكيمى" تمكن بنتيجتها من وضع جدول دقيق جداً للجيب بزيادة دقيقة واحدة . ثم وضع جدولاً آخر للجيب بزيادة ثانية واحدة فقط ، جدولاً للظل بزيادة دقيقة واحدة . إما البيرونى فقد استخدم طرقاً مختلفة للتقريب المتتابع لقيم المقادير المثلثية . ويمكن بواسطة هذه الطرق جعل الفرق بين القيم التقريبية والقيم المضبوطة صغيرة بأية درجة مرغوبة . و جدول الجيوب الذى وضعه البيرونى هو بزيادة 15 دقيقة ولكن الجديد عنده هو أنه لم يقتصر على استخدام الاستقطاب الخطى فى التقريب ، كما فعل جميع من سبقه من العلماء ، بل استخدم كذلك

$$\begin{aligned} \sin X &= \sin X_0 + (X - X_0) \frac{\sin(X_0 + 15') - \sin X_0}{15'} + \\ &+ (X - X_0)^2 \frac{2\sin(X_0 + 15') - \sin X_0 - \sin X_0 - \sin(X_0 - 15')}{15'^2} \end{aligned}$$

وكذلك وضع البيرونى جدولاً للظل بزيادة درجة واحدة باستخدام الاستقطاب التربيعى حسب القاعدة .

$$\begin{aligned} \tan X &= \tan X_0 + (X - X_0) \frac{\tan(X_0 + 1^\circ) - \tan X_0}{1^\circ} + \\ &+ (X - X_0)^2 \frac{\tan(X_0 + 1^\circ) - \tan X_0 - \tan X_0 - \tan(X_0 - 1^\circ)}{1^\circ^2} \end{aligned}$$

ولاحظ البيرونى انه يمكن استخدام هذه الطريقة فى وضع مختلف الجداول المثلثية والفلكية .

ملخص

قاد التطور السريع لعلم الفلك في اليونان الى الاهتمام بدراسة العلاقة بين اقواس الدوائر واوتارها . وتعامل العلماء اليونانيون مع مقدار مثلثي واحد فقط وهو وتر القوس الذي هو في الحقيقة ضعف جيب نصف الزاوية المركزية المقابلة لهذا القوس . واعتمد اليونانيون في وضع جداول الاوتار على مبرهنة بطليموس المكافئة لقانون جيب مجموع زاويتين ، وكذلك على قانون وتر نصف الزاوية . وساعدتهم مبرهنة منلاوس حول الشكل الرباعي على حل بعض حالات المثلث الكروي . وقام العلماء الهنود باستبدال الاوتار بالجيوب وادخال مفهوم جيب التمام ومقابل الجيب للزاوية ، ووضعوا جدولا صغيرا للجيوب أما علماء بلاد الاسلام فقد ادخلوا القيم المثلثية الباقية وهي الظل وظل التمام والقاطع وقطاع التمام واكتشفوا العديد من خواصها والعلاقات التي تربطها ببعضها ، ووجدوا طرق حل جميع حالات المثلث المستوي والكروي ، واصبح علم المثلثات على ايديهم علما مستقلا بذاته . كما أنهم وضعوا جدولا مثلثية دقيقة لجميع القيم المثلثية واخترعوا بعض الطرق التقريبية لادراك مستوى عال من الدقة في حساب قيم المقادير المثلثية لجميع الزوايا . كان لبعض المؤلفات العربية في علم المثلثات تأثير كبير على تطور هذا العلم في أوروبا في القرن الوسطي . نخص بالذكر " كتاب الشكل القطاع " للعالم نصير الدين الطوسي .



المراجع

- 1 - C . BOYER, " A HISTORY of mathematics " , Newyork 1968
- 2 -Howard Eves , " An Introduction to the history of mathematics " , Newyork 1964

- 3- ا . بوشكيفيتش (تاريخ الرياضيات في القرون الوسطى) (باللغة الروسية) . موسكو 1961م .
- 4- جمال الدباغ ، (تاريخ الرياضيات) لمعاهد معلمى مرحلة التعليم الاساسى . طرابلس الغرب 1990-1991م .
- 5- على عبدالله الدفاع ، (العلوم البحتة في الحضارة العربية والاسلامية ، بيروت 1041هـ .
- 6- رشدي راشد (تاريخ الرياضيات العربية بين الجبر والحساب) سلسلة (تاريخ العلوم عند العرب) (1) ترجمة حسين زين الدين ، مركز دراسات الوحدة العربية ، بيروت 1989م .